Absender:

Wohnort:
Straße, Hausnummer,
Gebäudeteil, Stockwerk

Prof. Dr. M. Planck
Berlin-Grunewald
Wangenheimstr. 21

Postkarte

Werdet Rundfunkteilnehmer

BERLIN-CHARLOTTENBURG 2
9 7 30
18-19
u

Herrn Dr Armin Weiner

Nová 36

in Brünn

Tschechoslowakei

Straße, Hausnummer,
Gebäudeteil, Stockwerk

DSI

Berlin-Grunewald, 9.7.30.

Sehr geehrter Herr Dr! Mit gleicher Post sende ich Ihnen als Geschäftspapiere das Manuscript meines letzten Vortrags in der hiesigen Akademie der Wissenschaften.

Hochachtungsvoll

Dr. M. Planck.

Herrn Dr. Ing. Armin Weiner

Brünn (Tschechoslowakei)

Nová 36

Geh. Reg. Rat
Prof. Dr. M. PLANCK
Berlin-Grunewald
Wangenheimstr. 21

DSI

BERLIN-
-3 6. 30. 14-15
CHARLOTTENBURG 2

Herrn Oberdirektor Dr. Armin Weiner

Brünn, Nová 36

Tschechoslowakei.

Geh. Reg. Rat
Prof. Dr. M. PLANCK
Berlin-Grunewald
Wangenheimstr. 21

Herrn Dr. Ing. Armin Weiner

Brünn (Tschechoslowak

Neugasse 36

Absender: ....

Wohnort: ....
Straße, Hausnummer,
Gebäudeteil, Stockwerk

Postkarte

Vergiss nicht Strasse
und Hausnummer
anzugeben

BERLIN-CHARLOTTENBURG 2
29 7 29
12-1 V
s

Herrn Prof. Dr. Ehrenhaft

in Wien IX

Strudlhofgasse 4

Straße, Hausnummer,
Gebäudeteil, Stockwerk

DSI

Berlin-Grunewald, 28. 7. 24.

Verehrtester Herr Kollege! Da Sie schon Anfang August Stettin verlassen, so will ich meinen Dank für Ihren werten Brief vom 24. d. M. schnell absenden, obwohl ich noch nicht im Stande bin, Ihre Frage nach meinen Reiseplänen schon jetzt zu beantworten. Ich werde das innerhalb des nächsten Monats sicher tun und darf dann wohl an Ihre Stettiner Adresse schreiben. Hoffentlich haben Sie und Ihre werte Gattin die Hitzwelle gut überstanden. Mit besten Grüßen an Sie beide

Ihr aufrichtig ergebener, gezwungener [illegible]

M. Planck.

$C = \sigma^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \sigma^2}$ $\sigma = \frac{h^2}{8\pi^2 J k T}$ $\Psi = -\frac{F}{T} = S - \frac{U}{T}$

Boltzmann: $\Psi = -Nk \ln\sigma + \text{const.}$

Ehrenfest: $\Psi = 2N \cdot k \cdot \ln \sum_0^\infty e^{-n^2\sigma}$ $J = 6{,}9 \cdot 10^{-41}$

Holm. $\Psi = 2Nk \ln \sum_0^\infty e^{-(n^2+n+\frac{1}{3})\sigma}$ Stimmt besser. $J = 1{,}36 \cdot 10^{-40}$ (das Doppelte)

[Bjerrum noch größer: $5{,}4 \cdot 10^{-40}$ aber für HCl.]

Planck. $\Psi = Nk \ln \sum_0^\infty (2n+1) \cdot e^{-(n^2+n+\frac{1}{2})\sigma}$

für hohe Temperatur (kleine σ) wird $C = Nk$

für tiefe Temperatur (große σ) ist

nach Holm: $N \cdot 8k\sigma^2 e^{-2\sigma}$ Ehrenfest: $N\, 2k\sigma^2 \cdot e^{-\sigma}$

nach Planck $N \cdot 12 k\sigma^2 e^{-2\sigma}$

Holm hat aus tiefen Temp. berechnet: $J = 1{,}36 \cdot 10^{-40}$

Ehrenfest $J = 6{,}9 \cdot 10^{-41}$ (die Hälfte)

Dritter Teil.

lg F lg T $\frac{h^2}{8\pi^2 e T}$

Dr. M. Planck

Erster Teil

Vortrag i. d. Phys. Ges. ~~23. 7. 15.~~ 5. 11. 15

$C_p - C_v = 2$

1atomig $\frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$, $C_p = 5$, $C_v = 3$

2atomig $\frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5}$, $C_p = 7$, $C_v = 5$. Erklärung d. klassischen Theorie: ! 2 Grade von Drehfreiheit.

Unterschied: 2 Freiheitsgrade (nicht 3)

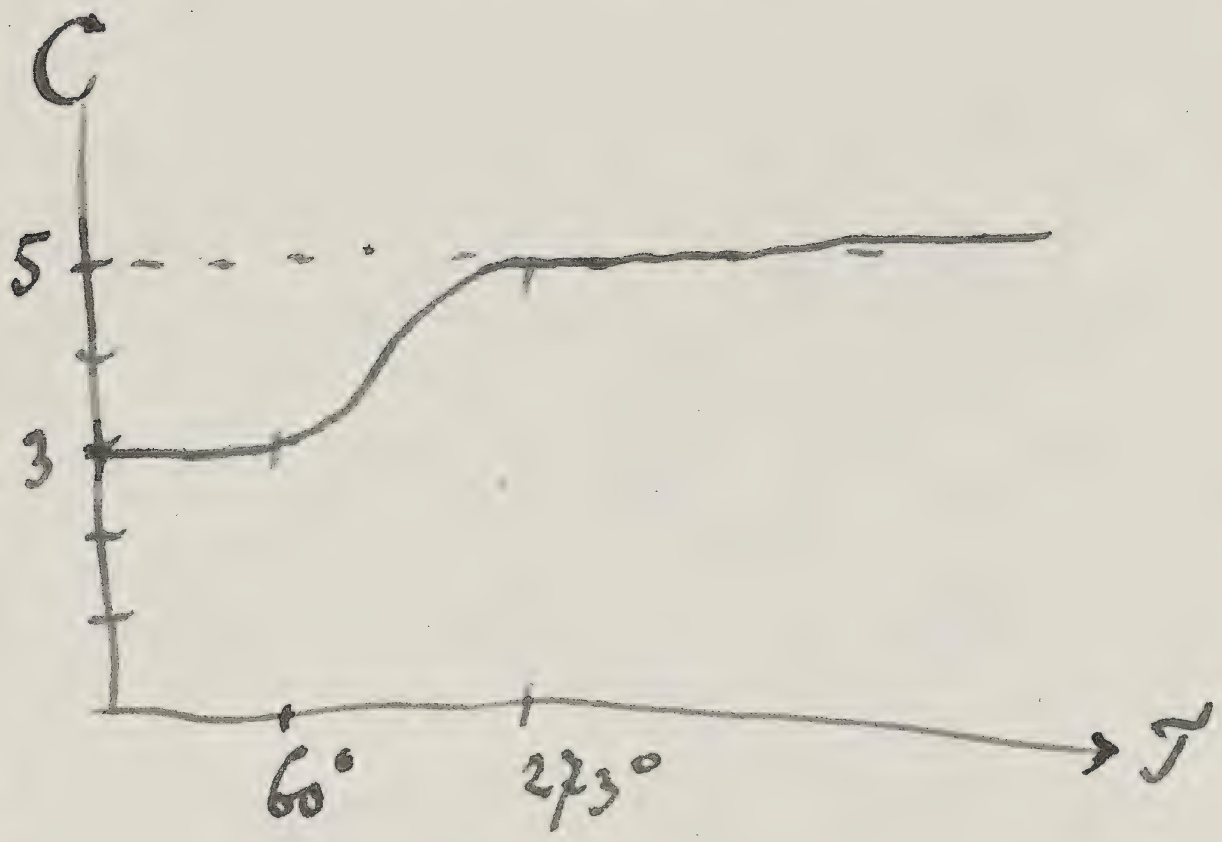
Schon früh Schwierigkeit wegen der „[illegible]".

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Exp. Prüfung an H_2 durch Eucken. 1912.

Veranlasst v. Nernst. Kritische Temp. $T = 32$.



~~[illegible] 3. [illegible] $\nu = 0$.~~

~~[illegible] $\frac{\nu}{T}$ [illegible]~~

Nun frage nach dem Gesetz.

$\frac{dS}{dU} = \frac{1}{T}$

$S = k \ln W$

I. Einstein 1913 u. Stern. Nehmen einen [illegible] an

a) $E = N \cdot \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ als Energie

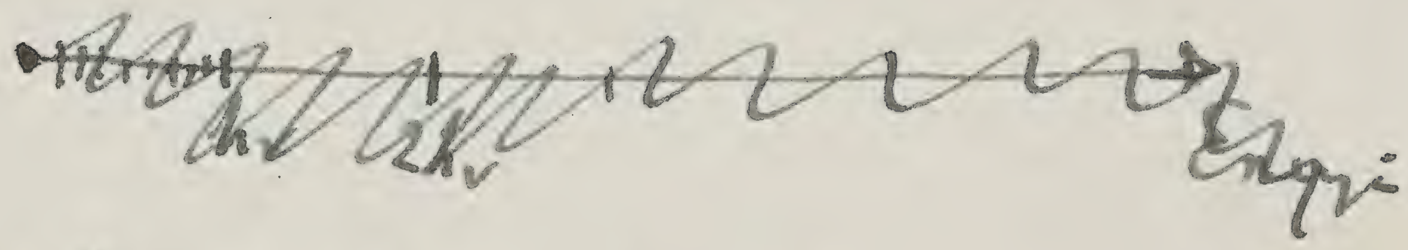
andererseits $E = N \cdot \frac{J}{2} (2\pi\nu)^2$

gibt schlechte Kurve mit schlechter Tangente

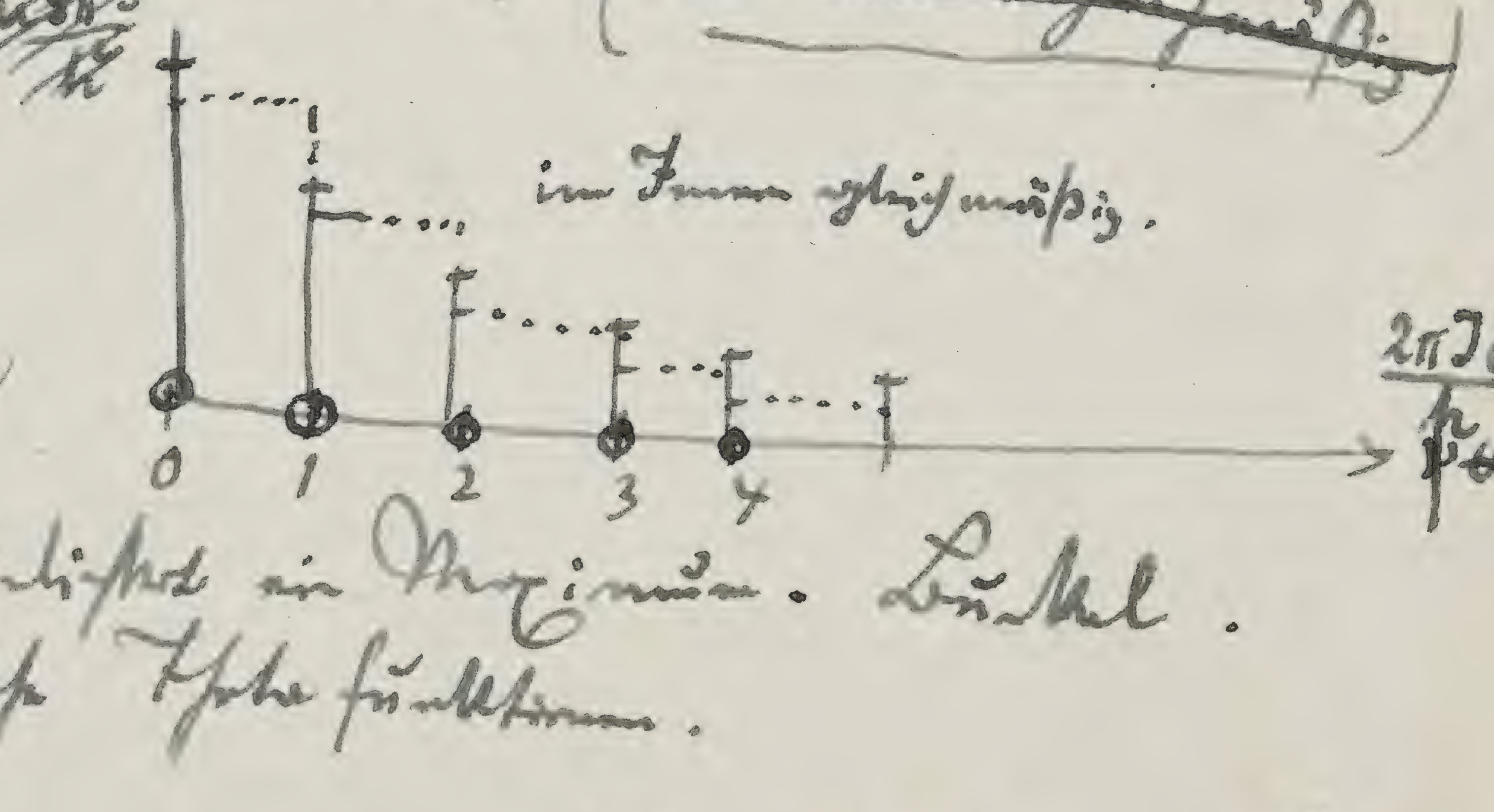
(Abweichung [illegible] [illegible])

b) $E = N\left(\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} + \frac{h\nu}{2}\right)$ Nullpunktsenergie

$E = N \cdot \frac{J}{2} (2\pi\nu)^2$.



~~[illegible] (im Innern gleichmäßig)~~



II. Ehrenfest 1913. $u = \frac{J}{2}(2\pi\nu)^2 = \frac{nh\nu}{2}$,

$\frac{J}{2}\omega^2 = \frac{n}{2} \cdot \frac{h\omega}{2\pi}$

Energie eines Rotators $u = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 J}$.

$\omega = \frac{nh}{2\pi J}$

$\nu = \frac{nh}{4\pi^2 J}$

Wahrscheinlichkeit ein Maximum. Künstlich. Jacobische Thetafunktionen.

III. Holm. Kein Künstel. Nur Grenzwerte. (meine Theorie) 1913.

Welches Gesetz ist das richtige?

Wie wendet man d. Quanten[illegible] [illegible] an. [illegible]

[illegible] künstlich. Wie [illegible] [illegible] Schwingungen. Nicht gelungen.

Zweiter Teil

Elektr. Ladung hat keinen Einfluß auf die Wahrscheinlichkeit (Art der Rotation)

Einfluß d. Strahlung. Ganz allein muß dieselbe stationär [illegible]. Auch i.d. Theorie der Form i.d. Strahlungsmech.

Energieverteilung bewirkt. ~~Lorentz indirekt~~. Wichtig zu betonen.

~~Resultierende~~ ~~bei fortschreitender Verdünnung fragt~~

~~der Einfluß d. Strahlung~~.

Theorie von Gehrcke. Ungültigkeit des Maxw.

Gesetzes der Geschw. für ~~Elektronen~~ gebundenen Moleküle & stat. Zustand. "Wahrsch. immer kleiner mit Zeit der größten Geschw. stärker ab als Maxw. Gesetz ergibt!"

~~$A_s + A_f = E_s + E_f$~~

~~$A'_s + A'_f = E'_s + E'_f$~~

~~mit Wärme~~ / ~~zw. Molekülen~~

Energie geht beim Stoß durch Emission verloren, "namentlich bei schnell bewegten Elektronen". Aber: hier handelt es sich um ein stationäres Strahlungsfeld!

bei den Stößen wird ebensoviel Energie absorbiert wie emittiert. Lorentz indirekt. Wäre es nicht so, so müßte bei der freien Wärmestr. mehr Energie absorbiert werden.

Aber Verdünnung. Emission wird selten, Absorption noch seltener.

bei den Stößen findet im Mittel kein Energieverlust durch Strahlung statt. (Abgesehen von Zerstreuung)

Daneben neue Methode (Einstein)

Ungültige / Wahrscheinlichkeit [illegible] / (Kurt Wien [illegible])

Arbeit von Fokker. Strahlung berechnet nicht nach der klass. Theorie auf die Rotation. bei [illegible] ~~Lamm~~. (Ohne [illegible] Kräfte) Man erhält e [illegible]

Unhaltbarkeit der klass. Theorie. Aber die klassische Theorie ist in sich logisch. ~~Führt zum~~ Dann a ≥ c

~~Quantenhypothese führt zu Erweiterung der Hal.~~ Rayleighsches Gesetz, d.h. Boltzmannscher Ausdruck.

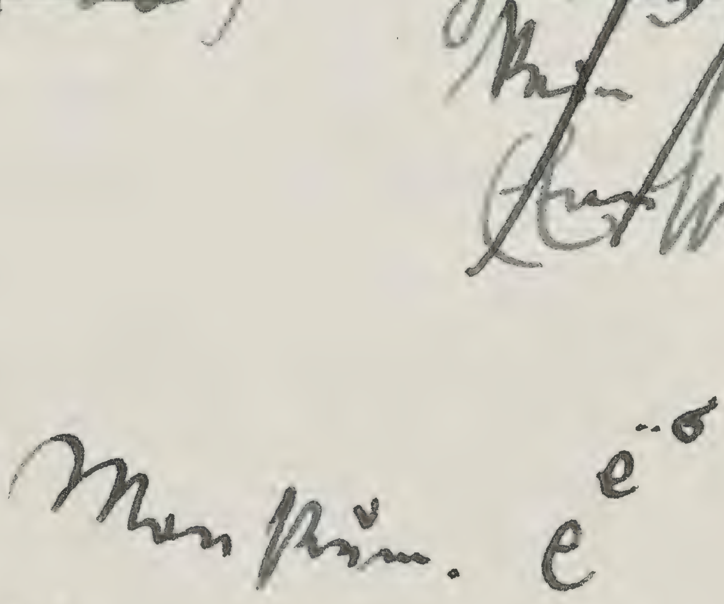
Interessant ~~die Unhaltbarkeit~~ wegen der Zuverlässigkeit d. Methode.

Ist es möglich, durch ~~[illegible]~~ die Quantenhypothese d. statist. Wahrsch. u. äußere Emission zur Hohlraumstrahlung zu gelangen?

Ja. Es ergibt sich ein einfaches Emissionsgesetz. Wahrscheinlichkeit dieses [illegible] Wünsche.

Dieses Gesetz benutze ich nun, um auf ein [illegible] Weg d. 2. Hauptsatz und d. [illegible]

Resultat: Aufschreiben. Wahrsch. dieses nicht [illegible].



Dr. M. Planck

DSI

Geh. Reg. Rat
Prof. Dr. M. PLANCK
Berlin-Grunewald
Wangenheimstr. 21

15. 5. 29.

Sehr geehrter Hr. Dr!

Da Sie so großen Wert darauf legen, so übersende ich Ihnen beiliegend die Bleistiftskizze zu einem Vortrag, den ich vor 9 Jahren in der Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin) gehalten habe, zur beliebigen Verwendung, eventuell auch für den Originalakt. Jedenfalls habe ich Ihnen damit meinen guten Willen gezeigt.

Hochachtungsvoll ergebenst

Dr. M. Planck.

Geh. Reg. Rat
Prof. Dr. M. PLANCK
Berlin-Grunewald
Wangenheimstr. 21

3. 6. 30.

Sehr geehrter Herr Dr!

In Beantwortung Ihres werten Schreibens vom 26. v. M. bestätige ich Ihnen gern meine Zusage, Ihnen ein eigenhändig geschriebenes Manuscript von mir zu überlassen. Nun ist leider seit meinem Vortrag in Wien bereits eine so lange Zeit verstrichen, dass das von mir Ihnen damals in Aussicht gestellte Manuscript (zur „Wärmelehre") bereits den Weg aller erledigten Papiere gefunden hat. Dagegen werde ich Ihnen gern — und ich hoffe, das wird Ihnen ebenso recht sein —

das Manuscript meines demnächst (am 26. Juni) in der preussischen Akademie der Wissenschaften zu haltenden Vortrags zusenden, also spätestens in 4 Wochen.

Mit besten Empfehlungen Ihr ergebener

Dr. M. Planck.

DSI

Geh. Reg. Rat
Prof. Dr. M. PLANCK
Berlin-Grunewald
Wangenheimstr. 21

5. 5. 29

Sehr geehrter Herr Dr!

Ihr werthes Schreiben vom 26. v. M. habe ich empfangen und danke Ihnen für das Interesse an meinen Arbeiten. Wenn Sie wirklich Wert darauf legen, die Handschrift eines Werkes von mir zu besitzen, so bin ich gern bereit, Ihnen eine solche zu überlassen. Eine Schwierigkeit besteht aber insofern, als ich in der Regel meine Manuskripte nicht handschriftlich anfertige, sondern nach einzelnen Bleistift-notizen Fremden in die Feder oder in die Maschine diktiere.

Eine Ausnahme macht das Manuskript zu meinem Lehrbuch „Einführung in die theoretische Physik", bei dessen letztem Band („Wärme") ich gerade beschäftigt bin. Das schreibe ich vollständig eigenhändig. (Sollten Sie

also denn Interesse haben, so könnte ich Ihnen, wenn der Druck vollendet ist (was aber wohl noch etwa ein Jahr dauern wird) einen Teil des Manuskripts zuschicken. Denn das Ganze würde Ihnen doch jedenfalls zu viel sein.

Mit vorzüglicher Hochachtung

Ihr ergebenster

Dr. M. Planck.

DSI

Berlin-Grunewald, 22. 6. 20.

Sehr geehrtes Fräulein!

Damit Sie nicht glauben, daß ich mich gleichgültig gegen Ihr freundliches Schreiben oder gar gegen die darin aufgeworfenen sachlichen Fragen verhalte, antworte ich Ihnen darauf sogleich, muß allerdings auch hinzufügen, daß es mir leider ganz unmöglich ist, mit derjenigen Ausführlichkeit darauf einzugehen, die dem Gegenstand und meinem Wunsche entspricht. Wenn Sie wüßten, in welchen bedrängten Umständen ich mich gegenwärtig befinde und was jetzt alles, nach der Rückkehr von der schwedischen Reise, auf mir lastet, würden Sie mich jedenfalls vollkommen verstehen.

DSI

Ich muß mich also jetzt darauf beschränken Ihnen zu sagen, daß ich den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik einfach deshalb für ungeeignet halte, um als Grundlage, ja auch nur als Beitrag für eine Untersuchung über das Dasein Gottes oder über die Endlichkeit der Welt zu dienen, weil nach meiner Meinung der zweite Hauptsatz ein Wahrscheinlichkeitssatz ist. Die tiefste und gründlichste Untersuchung seines eigentlichen Wesens habe ich gefunden in den bezüglichen Arbeiten des leider zu früh verstorbenen Smolan v. Smoluchowski, die zum wesentlichen Teil in der Physikalischen Zeitschrift veröffentlicht sind, etwa in den Jahren um 1916 herum.

Spezielle statistische Fragen werde ich Ihnen gern zu beantworten versuchen. Es tut mir leid, Sie neulich, bei unserer flüchtigen Begrüßung in der Bohr-Sitzung, nicht ausführlicher haben sprechen zu können. Hoffentlich ist es Ihnen seitdem gut ergangen. Es grüßt Sie bestens

Ihr ergebener

M. Planck

Berlin, 22. April 1897.

Geehrter Herr Dr!

Herr Prof. Scholz, an den ich mich in Ermangelung näherer Kenntnisse wegen Ueberlassung eines Vereins-Hüttenschlüssels für die Monate August u. September gewandt, hatte die Güte mir mitzutheilen, daß er mein Gesuch Ihnen, als dem Referenten in Schlüssel-Angelegenheiten, zugestellt habe, u. daß es am besten für mich sei, mich direkt an Sie zu wenden. Indem ich diesem Rathschlage folge u. Sie höflichst bitte, mir thunlichst bald einen Bescheid zukommen zu lassen, habe ich meinem an Hrn. Scholz gerichteten Briefe nichts weiter hinzuzufügen, als daß ich die Gewährung meines Wunsches sehr hoch schätzen u. gerne jede erforderliche Bürgschaft für eine sorgfältige, sachgemäße Verwendung leisten würde. Hochachtungsvollst

Ihr ganz ergebenster
Prof. Dr. M. Planck.

DSI

Vortrag [illegible] 22/7. 20

Gesetz [illegible] [illegible] Normalspektrum.

„Ableitung des Gesetzes der [illegible] Normalspektrum". [illegible] W. Nernst

[illegible]

Methode

[illegible]

1 Freiheitsgrad

$= dg$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad n-1 \quad n$

$\varepsilon_0 \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_{n-1} \quad \varepsilon_n \quad \varepsilon_{n+1}$

$\varepsilon_n \leqq \bar{\varepsilon}_n \leqq \varepsilon_{n+1}$

$\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_n + (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)\alpha$

$0 \leqq \alpha \leqq 1$

I. [illegible]

II. [illegible] $(\overline{r_0})^2 << \overline{r_0}$

Allgemein [illegible]:

$$E = N_0 \bar{\varepsilon}_0 + N_1 \bar{\varepsilon}_1 + N_2 \bar{\varepsilon}_2 + \dots$$

$$N_n = \frac{e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_n}{kT}}}{\sum e^{-\frac{\bar{\varepsilon}}{kT}}} N$$

$$\frac{N_{n+1}}{N_n} = \frac{W_{n+1}}{W_n} = e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_{n+1} - \bar{\varepsilon}_n}{kT}}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\bar{\varepsilon}_{n+1} - \bar{\varepsilon}_n = h\nu$$

Ausstrahlung. $N_n \tau A_n$

Einstrahlung. $N_n \tau \rho_\nu \varepsilon_{n, n+1}$ $\quad N_n \tau \rho_\nu \varepsilon_{n, n-1} \tau$

$\varepsilon_{n, n+1} \neq \varepsilon_{n, n-1}$

$$N_n \rho_\nu \varepsilon_{n, n+1} \tau = N_{n+1} \rho_\nu \varepsilon_{n+1, n} \tau + N_{n+1} A_{n+1} \tau$$

$$(N_n \varepsilon_{n, n+1} - N_{n+1} \varepsilon_{n+1, n}) \rho_\nu \tau = N_{n+1} A_{n+1} \tau$$ Grundlage, Einstein

Oszillatoren:

$\overline{r_e} = \frac{e^2}{4m} \frac{\rho_\nu}{\nu} \cdot \tau$

$\overline{r_e^2} = \frac{e^2}{2m} \frac{\rho_\nu}{\nu} g \cdot \tau$

$r_a = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2 \nu g}{mc^3} \cdot \tau$

τ [illegible]

$$(\overline{r_e} - r_a) W(g) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial g} \left(\overline{r_e^2} W(g) \right)$$ Fokker'sche Gleichung

$\overline{r_e^2} >> (\overline{r_e})^2$

$\overline{r_e} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial g} (\overline{r_e^2})$

[illegible] Rayleigh'sches Gesetz: $\rho_\nu = \frac{\nu^2}{c^3} kT$

$$-\frac{1}{2} \overline{r_e^2} \frac{\partial W(g)}{\partial g} = r_a W(g)$$

[illegible] $\quad N W(g) dg = N_n$

$\frac{r_a}{r_e} = \frac{\nu^3}{2c^3 \rho_\nu}$

$N W g h = N_n$

$$-\frac{1}{2} \overline{r_e^2} \frac{N_{n+1} - N_n}{h^2} = r_a \frac{N_{n+1}}{h}$$

[illegible]

1) $\mathcal{E}_{n,n+1} = \mathcal{E}_{n+1,n}$

2) $$\frac{A_{n,n+1}}{\mathcal{E}_{n,n+1}} = \frac{A_{n+1}}{\mathcal{E}_{n+1,n}} = \frac{2 h \nu_a \Omega}{\nu_a^3} = \frac{h\nu^3}{c^2}$$

3) Ungedämpfter [illegible] / Rotation

$$A_n = n \frac{8\pi^2}{3} \frac{\varepsilon^2 \nu^2}{m c^3} \qquad A_n = n^3 \frac{\varepsilon^2 h^2}{6\pi^2 c^3 J^3}$$

III. Zweite Fassung

1) Auffallen $E_r = 2 \sigma_\nu \Delta\nu \, f \, \Omega \, \tau$

$f = 10^{-10}$ cm² $\Omega = 10^{-4}$ $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm $\frac{\Delta\nu}{\nu} = 0{,}001$ $T = 2000$, $\tau = 4200$

~~[illegible]~~ Austausch

$W_n(y)\,dy$ [illegible] $\frac{\partial W(y)}{\partial y} = 0$ $W = \text{const.}$

$$-\int_{g_n-\gamma}^{g_n+\gamma} r_a W(y)\,dy = \frac{1}{2}\left(W_n - W_{n-1}\right)\left(\overline{r_a^2}\right)_n$$

$$-\int_{g_n-\gamma}^{g_n+\gamma} r_a W(y)\,dy = -W_n \int_{g_n}^{g_n+h} r_a\,dy = -W_n \cdot h\,(r_a)_n = \frac{1}{2}\left(W_n - W_{n-1}\right)\left(\overline{r_a^2}\right)_n$$

Also [illegible] $h \cdot (r_a)_n \; \frac{1}{2}\left(\frac{W_{n-1}}{W_n} - 1\right) (\overline{r_a^2})_n$ $\qquad \frac{(r_a)_n}{\overline{r_a^2}_n} = \frac{\nu^3}{c^2 \cdot 2(\sigma_\nu)_n}$

$h \cdot \frac{\nu^3}{c^2 \ldots} \; f\left(\frac{x_{n-1}}{x_n} - 1\right)$

DSI

Geschäftspapiere

Herrn Dr. Armin Weiner

Nová 36.

Brünn

Tschechoslowakei

Prof. Dr. M. Planck
Berlin-Grunewald
Wangenheimstr. 21

Prof. Dr. M. Planck
Berlin-Grunewald
Wangenheimstr. 21

1

Ueber die Grenzschicht verdünnter Elektrolyte.

Von Max Planck

§1. In zwei Mitteilungen über die Potentialdifferenz zweier verdünnter binärer ~~einwertiger~~ Elektrolyte [1] habe ich den Gegensatz untersucht, der zwischen der von P. Henderson und der von mir für die Größe der Potentialdifferenz entwickelten Formel besteht. Beide Formeln beruhen auf der von W. Nernst begründeten Theorie der Elektrizitätsbewegung in Elektrolyten, ihr Unterschied wird lediglich ~~dadurch~~ bedingt, daß bei ihrer Ableitung verschiedene Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Grenzschicht eingeführt werden, welche den stetigen Übergang der Ionenkonzentrationen ~~zwischen den~~ von dem einen zum andern Elektrolyten vermittelt.

Wenn wir zur Vereinfachung der Rechnungen die Betrachtung beschränken auf zwei Elektrolyte mit einem gemeinsamen Ion, z.B. HCl und KCl, so ist die Summe der Konzentrationen der beiden Kationen: c' und c'', überall und immer gleich der Konzentration des ~~Anions~~ gemeinsamen Anion:

$$c' + c'' = c. \qquad (1)$$

[1] M. Planck, diese Berichte, p. 285, 1927; p. 9, 1929.

3.3. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot a \vee c \supset b \vee d.$

Beweis. [3.1] $\vdash b \supset b \vee d : \supset :$
[2.291] $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \supset b \vee d.$ (1)
[3.1, 3.11, 2.291] $\vdash \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot c \supset b \vee d \cdot$ (2)
[(1), (2), 3.12] $\vdash \cdot 3.3 \cdot$

3.31. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \vee d.$

Beweis. [2.28, 3.1].

3.32. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \vee b \supset b.$

Beweis. [2.21, $\binom{b}{c}$ 3.12, 2.282].

3.33. $\vdash \cdot a \vee b \supset b \cdot \supset \cdot a \supset b.$

Beweis. [3.1, 2.29].

3.34. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \vee c \supset b \vee c.$

Beweis. $\left[\binom{c}{d}\ 3.3,\ 2.282\right]$.

3.35. $\vdash a \vee b \vee c \supset b \vee a \vee c \supset a \vee c \vee b$, usw.

Beweis. [3.11, 3.34].

3.4. $\vdash \cdot a \wedge c \cdot \vee \cdot b \wedge c \cdot \supset \cdot a \vee b \cdot \wedge c.$

Beweis. [Form. I, I, § 2, 20]. [3.1, 3.12].

3.41. $\vdash \cdot a \vee b \cdot \wedge c \cdot \supset \cdot a \wedge c \cdot \vee \cdot b \wedge c.$

Beweis. [Form. I, I, § 2, 21]. [2.26, 2.24, 3.3, 2.27].

3.42. $\vdash \cdot a \wedge b \cdot \vee c \cdot \supset\subset \cdot a \vee c \cdot \wedge \cdot b \vee c.$

Beweis. [Form. I, I, § 2, 23]. [3.1, 2.1, 3.4].
[3.41, 2.2, 2.22, 3.34, 3.22].

3.5. $\vdash \cdot a \supset b \vee c \cdot \wedge \cdot b \supset d \cdot \wedge \cdot c \supset e \cdot \supset \cdot a \supset d \vee e.$

Beweis. [3.34] $\vdash \cdot b \supset d \cdot \supset \cdot b \vee c \supset d \vee c.$ (1)
[3.34, 3.11] $\vdash \cdot c \supset e \cdot \supset \cdot d \vee c \supset d \vee e.$ (2)
[(1), (2), 2.23, 2.13] $\vdash \cdot 3.5 \cdot$

3.51. $\vdash \cdot a \supset b \vee c \cdot \wedge \cdot b \supset d \cdot \wedge \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot a \supset d.$

Beweis. $\left[\binom{d}{e}\ 3.5,\ 3.23,\ 2.13\right]$.

Wir beweisen noch den in der Einleitung genannten Satz:

3.6. $\vdash : a \vee b \supset : a \supset b \cdot \supset b.$

Beweis. [3.32, 2.271].

bezeichnet δ die Dicke der Grenzschicht, so haben wir ~~für die~~ an den beiden Endflächen dieser Schicht:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } x = 0: & c' = c = c_1, & c'' = 0 \\ \text{für } x = \delta & c' = 0, & c'' = c = c_2 \end{array}\right\} (2) \rightarrow$$

wo c_1 und c_2 die gegebenen Konzentrationen der beiden Lösungen sind.

Nun ist, falls das Lösungsmittel (Wasser) ruht, die Anzahl der Kationen, welche an irgend einer Stelle der Grenzschicht in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit hindurchgehen:

$$\left.\begin{array}{l} n' = -u' RT \dfrac{\partial c'}{\partial x} - u' \varepsilon c' \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ n' = -u'' RT \dfrac{\partial c''}{\partial x} - u'' \varepsilon c'' \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{array}\right\} (3)$$

wo u' und u'' die Beweglichkeiten, R die absolute Gaskonstante, T die Temperatur, ε die Elementarladung und φ das Potential bezeichnet, und die entsprechende ~~Zahl~~ Anzahl der Anionen:

$$n = -v RT \frac{\partial c}{\partial x} + v \varepsilon c \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \qquad (4)$$

Wenn kein Strom durch die Lösung fließt, so haben wir:

$$n' + n'' = n, \qquad (5)$$

und durch Substitution in (3) und (4):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{RT}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial x}(u'c' + u''c'' - vc)}{u'c' + u''c'' + vc}, \qquad (6)$$

woraus durch Integration von $x = 0$ bis $x = \delta$

n und u unterscheiden!

✓

DSI

2.29. $\vdash : a \supset b \cdot \supset : b \supset c \cdot \supset \cdot a \supset c.$

Beweis. [2.13, 2.27].

2.291. $\vdash : b \supset c \cdot \supset : a \supset b \cdot \supset \cdot a \supset c.$

Beweis. [2.29, 2.271].

2.3. $\vdash \cdot a \wedge b \cdot \wedge c \cdot \supset \cdot a \wedge \cdot b \wedge c.$

Beweis. [2.2, 2.28] $\vdash \cdot a \wedge b \cdot \wedge c \cdot \supset a.$ (1)
[2.22, 2.12] $\vdash \cdot a \wedge b \cdot \wedge c \cdot \supset b \wedge c.$ (2)
[(1), (2), 2.24] $\vdash$ 2.3.

2.31. $\vdash \cdot a \wedge b \cdot \wedge c \cdot \supset \cdot b \wedge a \cdot \wedge c.$

Beweis. [Form. I, I, § 1, 14]. [2.11, 2.13].

2.32. $\vdash \cdot a \wedge \cdot b \wedge c \cdot \supset \cdot a \wedge b \cdot \wedge c.$

Beweis. [2.11] $\vdash \cdot a \wedge \cdot b \wedge c \cdot \supset \cdot b \wedge c \cdot \wedge a \cdot \supset \cdot$
[2.31] $c \wedge b \cdot \wedge a \cdot \supset \cdot$ [2.3] $c \wedge \cdot b \wedge a \cdot \supset \cdot$
[2.11] $b \wedge a \cdot \wedge c \cdot \supset \cdot$ [2.31] $a \wedge b \cdot \wedge c.$

2.02. 2.02. $\vdash \cdot a \wedge b \wedge c \overset{=}{\mathrm{D}} \cdot a \wedge b \cdot \wedge c.$

2.33. $\vdash a \wedge b \wedge c \supset\subset a \wedge c \wedge b \supset\subset b \wedge a \wedge c$, usw.

2.4. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \wedge \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot a \supset d.$

Beweis. [Form. I, I, § 1, 24]. [2.13, 2.12, 2.13].

§ 3. Const. $\vee$.

3.1. $\vdash \vdash a \supset a \vee b.$

3.11. $\vdash \vdash a \vee b \supset b \vee a.$

3.12. $\vdash \vdash \cdot a \supset c \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \supset \cdot a \vee b \supset c.$

3.2. $\vdash \cdot a \vee b \cdot \vee c \cdot \supset \cdot a \vee \cdot b \vee c.$

Beweis. [3.1, 3.11] $\vdash \cdot c \supset \cdot b \vee c \cdot \supset \cdot a \vee \cdot b \vee c.$ (1)
[3.1] $\vdash \cdot a \supset \cdot a \vee \cdot b \vee c.$ (2)
[3.1, 3.11] $\vdash \cdot b \supset \cdot b \vee c \cdot \supset \cdot a \vee \cdot b \vee c.$ (3)
[(2), (3), 3.12] $\vdash \cdot a \vee b \supset \cdot a \vee \cdot b \vee c.$ (4)
[(1), (4), 3.12] $\vdash$ 3.2.

3.21. $\vdash \cdot a \vee \cdot b \vee c \cdot \supset \cdot a \vee b \cdot \vee c.$

Beweis. [Wie für 3.2].

3.01. 3.01. $\vdash \cdot a \vee b \vee c \overset{=}{\mathrm{D}} \cdot a \vee b \cdot \vee c.$

3.22. $\vdash a \vee a \supset a.$

Beweis. [2.21, $\binom{a}{b} \binom{a}{c}$ 3.12].

die Potentialdifferenz $\varphi_2 - \varphi_1 = E$ der beiden Lösungen sich berechnet.

Um die Integration ausführen zu können, bedarf es der Kenntnis des Gesetzes, nach welchem sich die Konzentrationen innerhalb der Grenzschicht ändern.

Henderson[1]) setzt einfach:

$$c' = c_1\left(1 - \frac{x}{\delta}\right) \quad \text{und} \quad c'' = c_2 \frac{x}{\delta} \qquad (7)$$

also nach (1):

$$c = c_1 - \frac{x}{\delta}(c_1 - c_2), \qquad (8)$$

wodurch die Randbedingungen (2) befriedigt werden. Dies bedeutet, daß der Zustand der Grenzschicht an der Stelle x sich ergibt, wenn man x Volumina des zweiten Elektrolyten mit $\delta - x$ Volumina des ersten Elektrolyten gleichmäßig mischt. Wir können daher diesen Zustand den „Mischungszustand" der Grenzschicht nennen. In ihm hängen alle Konzentrationen nur von einem einzigen Parameter ab. Nimmt man als solchen die Gesamtkonzentration c, so ist überall:

$$c' = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} \cdot c_1 \quad \text{und} \quad c'' = \frac{c_1 - c}{c_1 - c_2} \cdot c_2 . \qquad (9)$$

Im Gegensatz dazu habe ich zur Integration von (6) den „stationären" Zustand der Grenzschicht herangezogen, d.h. denjenigen Zustand, der sich mit der Zeit nur verhältnismäßig wenig ändert. Derselbe wird erhalten, wenn man annimmt

1) P. Henderson, Zeitschr. f. phys. Chem. 59, p. 118, 1907; 63, p. 325, 1908.

2) M. Planck, Ann. d. Phys. 40, p. 561, 1890.

DSI

46

2.14. $\vdash\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset b.$

2.15. $\vdash\vdash \cdot a \wedge \cdot a \supset b \cdot \supset b.$

2.01. 2.01. $\vdash \cdot a \supset\subset b \cdot =_{\mathrm{D}} \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset a.$

2.2. $\vdash \cdot a \wedge b \supset a.$

Beweis. [2.14] $\vdash \cdot a \supset \cdot b \supset a : \supset :$
[2.12] $\vdash \cdot a \wedge b \supset \cdot b \supset a \cdot \wedge b \cdot \supset$ [2.15] $b.$

2.21. $\vdash \cdot a \supset a.$

Beweis. [2.1, 2.2].

2.22. $\vdash \cdot a \wedge b \supset b.$

Beweis. [2.11, 2.2].

2.23. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot c \supset d \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \wedge d.$

Beweis. [Form. I, I, § 1, 30]. [2.12, 2.13].

2.24. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot a \supset c \cdot \supset\subset \cdot a \supset b \wedge c.$

Beweis. [Form. I, I, § 1, 34 und 35]. [2.23, 2.1, 2.13]. [2.2, 2.22].

2.25. $\vdash \cdot b \cdot \wedge \cdot a \supset c \cdot \supset \cdot a \supset b \wedge c.$

Beweis. [2.14, 2.12] $\vdash \cdot b \wedge \cdot a \supset c \cdot \supset \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot a \supset c \cdot \supset \cdot$
[2.24] $a \supset b \wedge c.$

2.26. $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset a \wedge b.$

Beweis. [2.21, 2.14] $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset a.$ (1)
[2.14] $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset b.$ (2)
[(1), (2), 2.24] $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset a \cdot \wedge \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \supset a \wedge b.$

2.27. $\vdash : a \supset \cdot b \supset c : \supset\subset \cdot a \wedge b \supset c.$

Beweis. [Form. I, I, § 1, 37 und 38]. [2.12, 2.15]. [2.26, 2.25, 2.13].

2.271. $\vdash : a \supset \cdot b \supset c : \supset\subset : b \supset \cdot a \supset c.$

Beweis. [2.27] $\vdash : a \supset \cdot b \supset c : \supset : a \wedge b \supset c : \supset :$
[2.11, 2.13] $b \wedge a \supset c : \supset :$ [2.27] $b \supset \cdot a \supset c.$

2.28. $\vdash \cdot a \supset c \cdot \supset \cdot a \wedge b \supset c.$

Beweis. [2.2, 2.26, 2.13].

2.281. $\vdash : a \supset b \cdot \supset : a \supset \cdot c \supset b.$

Beweis. [2.28, 2.27, 2.13].

2.282. $\vdash \cdot a \wedge \cdot a \wedge b \supset c \cdot \supset \cdot b \supset c.$

Beweis. [2.27, 2.12] $\vdash : a \wedge \cdot a \wedge b \supset c : \supset : a \wedge : a \supset \cdot b \supset c : \supset :$
[2.15] $b \supset c.$

von den Gleichungen der Kontinuität:

$$\frac{\partial c'}{\partial t} = -\frac{\partial n'}{\partial x}, \quad \frac{\partial c''}{\partial t} = -\frac{\partial n''}{\partial x}, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial n}{\partial x} \qquad (10)$$

und dann die linken Seiten gleich Null setzt.

Der stationäre Zustand der Grenzschicht entspricht an keiner ~~einzigen~~ Stelle einer Vermischung der beiden Elektrolyte, weil die beiden Konzentrationen c' und c'' nicht ~~an einer einzigen Stelle abhängen~~ der Bedingung $\frac{c'}{c_1} + \frac{c''}{c_2} = 1$ genügen, wie sie dies im Mischungszustand tun.

§ 2. Die Versuche, welche zur experimentellen Prüfung ~~Entscheidung zwischen~~ der beiden einander gegenüberstehenden Formeln für die Potentialdifferenz E der Elektrolyte im Nernstschen physikalischen Institut ~~d~~ von V. Plettig[1] angestellt worden sind, und die sich u. A. auch auf die Kombination einer ~~HCl-Lösung~~ Normallösung von HCl mit einer 0,01-Normallösung von KCl beziehen, haben in allen untersuchten Fällen unzweideutig zu Gunsten der Formel von Henderson entschieden. Damit ist bewiesen, daß die Grenzschicht der beiden Elektrolyte sich während der Dauer der Messungen (mehrere Stunden) nicht im stationären Zustand, sondern im Mischungszustand befindet. Das heißt aber, daß der Vorgang der eigentlichen Diffusion, wie er durch die Gleichungen (3) und (4) dargestellt wird, vollkommen verdeckt wird durch Strömungsvorgänge, bei denen sich die beiden Elektrolyte als Ganzes vermischen, in ~~vollkommener~~ Übereinstimmung mit Erfahrungen, die schon vor Jahren U. Behn[2] auf diesem Gebiete gemacht hat.

Auf der andern Seite erlangt die Theorie, auf der ja auch

[1] V. Plettig, Berliner Dissertation, ~~auf sich~~ wird demnächst im Druck erscheinen.

[2] U. Behn, Wied. Ann. 62, p. 54, 1897.

§ 1. Operationsregeln.

1.1. Um anzugeben, daß eine Formel auf die Liste der »richtigen Formeln« gebracht ist, wird das Zeichen $\vdash$ davor gesetzt. Ist die Formel ein Axiom, d. h. ist sie willkürlich als richtig angenommen, so wird dies durch Verdoppelung des Zeichens $\vdash$ angegeben.

1.2. Sind a und b richtige Formeln, so ist $a \wedge b$ eine richtige Formel.

1.3. Sind a und $a \supset b$ richtige Formeln, so ist b eine richtige Formel.

1.4. Die Formel »Const. a« am Anfang eines Paragraphen bedeutet, daß das Zeichen a eine Konstante ist. Jedes Zeichen, das nicht in dieser Weise als Konstante eingeführt ist, ist eine Variabele. Aus einer richtigen Formel entsteht wieder eine richtige Formel, wenn man eine Variabele überall zugleich durch eine andere Zeichenkombination ersetzt.

1.5. $\binom{p}{x}$ a ist die Formel, welche aus der Formel a entsteht, indem man die Variabele x (wenn diese in a vorkommt) überall durch die Zeichenkombination p ersetzt.

1.6. Die Formel $a \stackrel{=}{\scriptstyle D} b$ heißt eine Definition; sie bedeutet, daß aus einer richtigen Formel wieder eine richtige Formel entsteht, indem man die Zeichenkombination a durch b ersetzt oder umgekehrt, auch wenn das nicht überall zugleich geschieht.

Bemerkungen. Zu 1.2. Daß diese Regel notwendig ist, liegt an der gewählten Form der Axiome. Stellt man diese so auf, daß man 1.2 nicht braucht, so werden die Beweise verwickelter.

Zu 1.5. Diese Regel wird in diesem Artikel nur in den Beweisen gebraucht.

Zu 1.4. Im Aussagenkalkül werden die Variabeln durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet.

Zu 1.6. Die Numerierung der Definitionen läuft unabhängig neben derjenigen der übrigen Formeln; sie sind erkennbar gemacht durch Wiederholung der Nummer am Rande.

Die Einteilung der Formeln geschieht wie üblich durch Punkte. Die Zahl der Punkte wird herabgesetzt durch die Verabredung, daß die Zeichen $\wedge$ und $\vee$ stärker binden als die übrigen. Der Teil einer Formel, auf den sich ein Zeichen $\neg$ bezieht, ist, wenn notwendig, in ( ) gesetzt. Das Gebiet eines Assertionszeichens $\vdash$ reicht so weit, bis eine größere Zahl von Punkten auftritt als die, von der es begleitet wird.

§ 2. Const. $\cdot$, $:$, $:\cdot$, $::$, $\supset$, $\wedge$, $\supset\subset$, (,), $\stackrel{=}{\scriptstyle D}$.

2.1. $\vdash\vdash \cdot a \supset a \wedge a.$

2.11. $\vdash\vdash \cdot a \wedge b \supset b \wedge a.$

2.12. $\vdash\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \wedge c.$

2.13. $\vdash\vdash \cdot a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \supset \cdot a \supset c.$

die Henderson'sche Formel ~~abgeleitet ist~~ beruht, daß im Laufe der Zeit [F] auch die diffusen Formeln (3) und (4) in ihr Recht treten, und man wird ~~werden~~ fragen müssen, ~~wann~~ ob und wann ~~diese Ausdrücke~~ die Folgerungen aus ihnen experimentell nachweisbar sein werden. Dabei wird offenbar alles darauf ankommen, ~~[illegible]~~ erstens Strömungen möglichst zu vermeiden, zweitens die ~~Grenzbedingungen~~ Randbedingungen (2) möglichst lange Zeit

~~Eine Hauptschwierigkeit bei der Untersuchung der Zustände der Grenzschicht bildet ihre geringe Dicke δ.~~

hindurch aufrecht zu erhalten. ~~Letztere~~ Beides ließe sich vielleicht dadurch erreichen, daß man zwei große Quantitäten der beiden Elektrolyte durch eine sehr enge ~~(vertikal gestellte)~~ Röhre von der Länge δ miteinander kommunizieren läßt. Dann werden sich die Konzentrationen an den beiden Enden der Röhre zeitlich jedenfalls ~~sehr langsam~~ sehr wenig ändern gegenüber den Konzentrationsänderungen im Innern der Röhre. Dementsprechend wollen wir im folgenden die Randbedingungen (2) für alle Zeiten als erfüllt annehmen.

§3. Der „stationäre Zustand" ~~der Grenzschicht~~ unterscheidet sich, wie schon V. Plettig gefunden hat, in manchen Fällen sehr erheblich von dem „Mischungszustand" der Grenzschicht. Während für die Gesamtkonzentration c auch im stationären Zustand die lineare Abhängigkeit (8) von der Ortskoordinate x besteht, treten für die Ionenkonzentrationen c' und c'' [F] an Stelle der im ~~bereits~~ Mischungszustand gültigen Formeln (9)

[F] bei fortschreitender Vermischung der beiden Elektrolyte,

[F] im stationären Zustand, d.h. wenn man die drei Ausdrücke (10) gleich Null setzt,

DSI

Die intuitionistische Logik unterscheidet sich von der klassischen schon dadurch, daß in ihr keiner dieser vier Begriffe durch die andern definiert werden kann. Die folgenden Sätze sind zwar richtig, ihre Umkehrungen aber sämtlich unbeweisbar.

4.46. $\vdash \cdot \neg a \lor b \supset \cdot a \supset b$.

4.9. $\vdash \cdot a \supset b \cdot \supset \neg (a \land \neg b)$.

4.47. $\vdash \cdot a \lor b \supset \cdot \neg a \supset b$.

4.91. $\vdash \cdot a \lor b \supset \neg (\neg a \land \neg b)$.

3.6. $\vdash : a \lor b \supset : a \supset b \cdot \supset b$.

4.92. $\vdash \cdot a \land b \supset \neg (\neg a \land \neg b)$.

Die Formel $a \supset b$ bedeutet im allgemeinen: »Wenn a richtig ist, so ist auch b richtig.« Diese Aussage hat schon einen Sinn, wenn a und b konstante Aussagen sind, über deren Richtigkeit nichts bekannt zu sein braucht; wenn a und b auch Variabele enthalten, sagt sie etwa aus: »Wenn für eine bestimmte Ersetzung der Variabeln a richtig ist, so ist für diese auch b richtig.« Der Fall ist denkbar, daß, nachdem der Satz $a \supset b$ im angegebenen Sinne bewiesen ist, sich später zeigt, daß b immer richtig ist. Die einmal angenommene Formel $a \supset b$ muß dann richtig bleiben, d. h. wir müssen dem Zeichen $\supset$ eine solche Bedeutung beilegen, daß $a \supset b$ auch jetzt noch gilt. Entsprechendes kann bemerkt werden, falls sich nachträglich zeigt, daß a immer falsch ist. Aus diesen Gründen sind die Formeln

2.14. $\vdash \cdot b \supset \cdot a \supset b$ und 4.1. $\vdash \cdot \neg a \supset \cdot a \supset b$

aufgenommen.

§§ 2 und 3 weichen wenig von der klassischen Logik ab und sind nur der Vollständigkeit wegen aufgenommen. In § 2 verweise ich, nachdem die von Peano als Axiome angenommenen Sätze bewiesen sind, für die weiteren Beweise auf dessen »Formulaire de mathématiques« tome 1 (1895). § 4 weicht stark von der klassischen Logik ab. Den Schein, daß die dort hervortretenden Unterschiede eigentlich den wichtigsten Streitpunkt zwischen Intuitionisten und Formalisten bilden (welcher schon durch die am Anfang gemachte Bemerkung widerlegt wird), konnte ich hier nicht vermeiden, weil der Formalismus ungeeignet ist, die mehr fundamentalen Streitpunkte auszudrücken.

Von der Literatur sind am meisten gebraucht:

Peano, Formulaire de mathématiques (zitiert als »Form.« mit Band-, Kapitel-, Paragraph- und Formelnummer).

Russel and Whitehead, Principia mathematica.

Hilbert und Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik.

P. Bernays, Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalküls der »Principia mathematica«, Math. Zeitschr. 25 (1926) S. 305.

V. Glivenko, Sur la logique de M. Brouwer, Bulletins de l'Acad. royale de Belgique, 5e série, tome XIV (1928) S. 225.

~~im stationären Zustand~~ die folgenden Formeln ein:

$$c' = \frac{c - c_2\left(\frac{c}{c_2}\right)^{\alpha}}{c_1 - c_2\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\alpha}} \cdot c_1 \qquad (11)$$

$$c'' = \frac{c_1\left(\frac{c}{c_2}\right)^{\alpha} - c\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\alpha}}{c_1 - c_2\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\alpha}} \cdot c_2 \qquad (12)$$

Dabei hat die Konstante α die Bedeutung:

$$\alpha = \frac{\varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1)}{RT \cdot \log\frac{c_1}{c_2}} . \qquad (13)$$

Die Ionenkonzentrationen c' und c'' variieren also keineswegs linear von dem einen Ende der Verbindungsröhre zur andern, sondern sie können sogar dazwischen ein beträchtliches Maximum besitzen.

Setzt man z. B. $\frac{\partial c''}{\partial x} = 0$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $\frac{\partial c''}{\partial c} = 0$, so ergibt sich nach (12) bzw. (8) für die Lage des Maximums von c'':

$$c = c_1 \cdot \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (14)$$

und für die Größe des Maximums:

$$c'' = \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\alpha} - \frac{c_2}{c_1}} . \qquad (15)$$

Für den oben angeführten Fall der Kombination

$HCl \mid 0{,}01\ KCl$ ist:

$c_1 = 1$, $c_2 = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}7596$

also die Lage des Maximums der Konzentration c'' der $K^{\cdot}$-Ionen nach (14):

DSI

[illegible] auch seine *Widerspruchsfreiheit* gewährleistet, in diesem Sinne, daß es keine [illegible] rmel enthalten kann, die bei jener Interpretation einen widerspruchsvollen Satz darstellen würde.

Man kann auch das formalistische System an sich mathematisch betrachten, ohne an eine Interpretation zu denken. Die Widerspruchsfreiheit erhält dann eine andere Bedeutung, indem der Widerspruch als eine bestimmte Formel definiert wird; diese Betrachtungsweise tritt für uns hinter die vorige zurück. Hierher gehören aber die Fragen nach der Unabhängigkeit und Vollständigkeit des Axiomensystems. Im Anhang beweise ich, daß die Axiome meines Aussagenkalküls voneinander unabhängig sind. Die Vollständigkeit (im engeren Sinne) besagt[1], daß nach Hinzufügung einer bisher nicht ableitbaren Formel jede beliebige Formel ableitbar wäre. Sie kann für unser System nicht bestehen, weil immer noch die Formel ¬ ¬ a ⊃ a (wenn [illegible] darstellt, aus den Axiomen gefolgert werden kann, und welche also wieder auf die mathematische Interpretation des Formelsystems Bezug nimmt, kann, wie schon oben bemerkt worden ist, aus prinzipiellen Gründen nicht gefordert werden.

Nachträgliche Bemerkung. Wie Hr. Glivenko inzwischen bewiesen hat, (Acad. r. de Belgique, Bull. de la Classe des Sciences, s. 5, t. 15, 1929, p. 183) ist das System vollständig im Sinn der folgenden Eigenschaften:

1. Wenn der Satz a in der klassischen Logik beweisbar ist, so ist der Satz, »a kann nicht falsch sein«, es in unserem System.

2. Wenn der Satz, »a ist falsch«, in der klassischen Logik beweisbar ist, so ist er es auch in unserem System.

Das folgende formalistische System, aus den numerierten Regeln und Formeln bestehend, ist für sich allein lesbar; die *Bemerkungen* sind nur hinzugefügt, um den Zusammenhang mit der Mathematik zu erläutern und bemerkenswerte Formeln hervorzuheben. Die Beweise sind nur angedeutet; oft habe ich mich darauf beschränkt, die wichtigsten der angewandten Formeln zwischen [ ] anzugeben. Eine weitere Vereinfachung ist erreicht, indem ich schreibe: a ⊃ b ⊃ c ⊃ d, wo gemeint ist: Aus a folgt b; aus a und b folgt c; aus a, b und c folgt d. Auch gebrauche ich die Abkürzung »⊢ p ⊃ ⊢ q« für »⊢ p und ⊢ p ⊃ q, also ⊢ q«. (Vgl. Russell and Whitehead I, S. 9.)

Es werden *vier Grundbegriffe* eingeführt, nämlich:

a ⊃ b, »aus a folgt b«.

a ∧ b, »a und b«.

a ∨ b, »a oder b«.

¬ a, »nicht a«[2].

---

[1] Vgl. Hilbert und Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, S. 33.

[2] Das üblichere ∼ wird zu mehreren Zwecken gebraucht; außerdem weichen die Formeln, welche die Negation enthalten, am meisten von denen der klassischen Logik ab. Deshalb wähle ich für die Negation ein neues Zeichen.

43

4x

$$c = 0{,}3186$$

bzw. nach (8):

$$x = 0{,}6883\,\delta$$

und der Lage des Maximums nach (15):

$$c'' = 0{,}04977,$$

während im Ruhezustand ~~der~~ der Grenzschicht die Konzentration c'' F ~~an 0 linear bis 0,01~~ F der K^{+}-Ionen monoton, und zwar ~~nicht nur~~ linear an 0 bis 0,01 wächst. Der stationäre Zustand der Grenzschicht weist also stellenweise eine Lage der Konzentration der K^{+}-Ionen auf, der fast fünfzehn% größer ist als der im Ruhezustand größte Wert.

§ 4. Bei der großen Verschiedenheit der Ionenkonzentrationen im ~~dem~~ Ruhezustand und im ~~dem~~ stationären Zustand der Grenzschicht liesse sich vermuten, dass eine chemische Analyse der in dem Verbindungsrohr der beiden Elektrolyte enthaltenen Flüssigkeit eine geeignete Methode zur ~~Vergleichung Prüfung~~ Vergleichung der beiden Zustände ~~zu~~ bilden dürfte. Wenn wir als „Ionengehalt" der Grenzschicht den folgenden Mittelwert definieren:

$$\overline{c'} = \frac{1}{\delta}\cdot\int_0^{\delta} c'\,dx \qquad (16)$$

bzw.
$$\overline{c''} = \frac{1}{\delta}\cdot\int_0^{\delta} c''\,dx \qquad (17)$$

so ergeben sich für den Ruhezustand der Grenzschicht aus (7) die Ionengehalte:

$$\overline{c'} = \frac{c_1}{2} \quad \text{und} \quad \overline{c''} = \frac{c_2}{2} \qquad (18)$$

also für das gewählte Beispiel die Zahlenwerte:

Sonderabdrucke: 75 *Expl.*

2. Berichtigungsabzug 25. 1. 30 B

42

Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik.

Von A. Heyting
in Enschede (Niederlande).

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 19. Dezember 1929 [s. Jahrg. 1929 S. 686].)

Einleitung.

Die intuitionistische Mathematik ist eine Denktätigkeit, und jede Sprache, auch die formalistische, ist für sie nur Hilfsmittel zur Mitteilung. Es ist prinzipiell unmöglich, ein System von Formeln aufzustellen, das mit der intuitionistischen Mathematik gleichwertig wäre, denn die Möglichkeiten des Denkens lassen sich nicht auf eine endliche Zahl von im voraus aufstellbaren Regeln zurückführen. Der Versuch, die wichtigsten Teile der Mathematik in Formelsprache wiederzugeben[1], wird deshalb ausschließlich gerechtfertigt durch die größere Bündigkeit und Bestimmtheit der letzteren gegenüber der gewöhnlichen Sprache, Eigenschaften, welche sie geeignet machen, das Eindringen in die intuitionistischen Begriffe und ihre Verwendung bei Untersuchungen zu erleichtern.

Zum Aufbau der Mathematik ist die Aufstellung allgemeingültiger logischer Gesetze nicht notwendig; diese Gesetze werden in jedem einzelnen Fall gleichsam von neuem entdeckt als gültig für das eben betrachtete mathematische System. Die sprachliche Mitteilung aber, nach den Bedürfnissen des täglichen Lebens gebildet, schreitet in der Form der logischen Gesetze, welche sie als gegeben voraussetzt, fort. Eine Sprache, welche dem Gang der intuitionistischen Mathematik von Schritt zu Schritt nachgebildet wäre, würde so in allen Teilen von der gewohnten Form abweichen, daß sie die obengenannten günstigen Eigenschaften wieder gänzlich verlieren müßte. Diese Überlegungen haben mich dazu geführt, die Formalisierung der intuitionistischen Mathematik doch wieder mit einem Aussagenkalkül anzufangen.

Die Formeln des formalistischen Systems entstehen aus einer endlichen Zahl von Axiomen durch Anwendung einer endlichen Zahl von Operationsregeln. Sie enthalten außer den »konstanten« Zeichen auch Variabele. Das Verhältnis zwischen diesem System und der Mathematik ist nun dieses, daß bei einer bestimmten Interpretation der Konstanten und unter bestimmten Beschränkungen hinsichtlich der Ersetzung der Variabeln jede Formel einen richtigen mathematischen Satz darstellt. (Z. B. müssen die Variabeln im Aussagenkalkül nur durch sinnerfüllte mathematische Aussagen ersetzt werden.) Ist das System so beschaffen, daß es die letztgenannte Forderung erfüllt, so

---

[1] Diese Abhandlung bildet eine Umarbeitung des ersten Teiles einer von dem »Wiskundig Genootschap« in Amsterdam im Anfang 1928 gekrönten Preisschrift.

Die Korrektur ist an das Bureau der Akademie der Wissenschaften, Berlin NW7, Unter den Linden 38 (nicht an die Reichsdruckerei) zurückzusenden.

$$\overline{c'} = 0,5 \quad \text{und} \quad \overline{c''} = 0,005 . \qquad (19)$$

Dagegen für den stationären Zustand erhalten wir aus (11), (12) und (8) die Ausdrücke:

$$\overline{c'} = \frac{c_1}{c_1 - c_2\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^\alpha} \cdot \left\{ \frac{c_1 + c_2}{2} - \frac{c_2}{1+\alpha} \cdot \frac{c_1\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^\alpha - c_2}{c_1 - c_2} \right\} \qquad (20)$$

$$\overline{c''} = \frac{c_2}{c_1 - c_2\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^\alpha} \cdot \left\{ \frac{c_1}{1+\alpha} \cdot \frac{c_1\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^\alpha - c_2}{c_1 - c_2} - \frac{c_1 + c_2}{2}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^\alpha \right\} \qquad (21)$$

und daraus für den betrachteten speziellen Fall:

$$\overline{c'} = 0,471 \quad \text{und} \quad \overline{c''} = 0,034 . \qquad ~~(20)~~ \; (22)$$

Während also der Chlorgehalt der Grenzschicht

$$\overline{c} = \overline{c'} + \overline{c''} = 0,505$$

im stationären Zustand der nämliche ist wie im Mischungszustand, wie es nach (8) sein muß, beträgt der Kaliumgehalt F im stationären Zustand nach (22) fast das ~~Sie~~ Siebenfache des Kaliumgehaltes (19) im Mischungszustand. $F \; \overline{c''}$

Wenn man zu Beginn des Versuchs das Verbindungsrohr der beiden Elektrolyte ~~Lösungen~~ zur einen Hälfte mit der HCl-Lösung, zur andern Hälfte mit der KCl-Lösung gefüllt hat, ~~so [illegible] Anfangs~~ so wird ~~so ist~~ der Ionengehalt durch (18) bzw. (19) dargestellt. ~~nicht, denn~~ Diese Werte besitzen so lange unverändert Gültigkeit, als die Hendersonsche Annahme, daß die ~~über die Beschaffenheit der Grenzschicht, nämlich~~ Grenzschicht sich im Mischungszustand befindet,

Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik.

Von A. Heyting
in Enschede (Niederlande).

(Vorgelegt von Hrn. Bieberbach am 19. Dezember 1929 [s. Jahrg. 1929 S. ▬].)

II.

Einleitung.

Die erste Abhandlung dieser Reihe ist unter dem Titel »Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik« in diesen Sitzungsberichten erschienen[1]; sie enthält den intuitionistischen Aussagenkalkül, also nur diejenigen Formeln, welche auf die gegenseitigen Beziehungen der Aussagen Bezug haben, aber diese selbst nicht zergliedern. Um auch die Zerlegung in Subjekt und Prädikat zu ermöglichen, folgen wir dem Weg des Funktionenkalküls, der zuerst von Russell und Whitehead angegeben und neulich von Hilbert und Ackermann in ihrem Buch[2] übersichtlich dargestellt und wesentlich verbessert worden ist. Es muß also vor allem der Begriff des mathematischen Gegenstandes erläutert werden. Der wirkliche Aufbau der Mathematik fängt sofort mit der Betrachtung von Gegenständen (natürliche Zahlen, Mengen) an. Für die formale Behandlung erweist es sich aber als bequemer, allgemeine Sätze über Beziehungen zwischen Gegenständen und über Formeln, welche Gegenstandsveränderliche enthalten, vorauszuschicken. Hierfür lassen sich die gleichen Gründe anführen wie für das Aufstellen eines allgemeinen Aussagenkalküls, der den eigentliche mathematische Sätze darstellenden Formeln vorangeht. (I, Einleitung, S. ▬.)

Die grundlegende Beziehung zwischen Individuen ist $p \equiv q$, »p ist derselbe Gegenstand wie q«. Zur Erläuterung gehen wir etwas näher auf die später einzuführenden Gleichheitsbeziehungen ein. Das Zeichen $=$ wird gebraucht für Zahlengleichheit und ähnliche Begriffe (z. B. Gleichheit von Kardinalzahlen von Mengen); diese Beziehung kann bestehen zwischen Gegenständen, die nicht identisch sind; man denke an Darstellungen derselben Zahl in verschiedenen Zahlensystemen. Wir brauchen also ein besonderes Zeichen für die mathematische Identität, welche für jede Art von Gegenständen de-

[1] Sie wird im folgenden als »I« zitiert; die in ihr enthaltenen Formeln einfach durch die Nummer, da diese Numerierung hier fortgesetzt wird. Jede Formelnummer, welche vor dem »Dezimalzeichen« eine kleinere Zahl als 5 enthält, verweist also auf die frühere Abhandlung.

[2] Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1920. Im folgenden zitiert als H.-A.

Die Korrektur ist an das Bureau der Akademie der Wissenschaften, Berlin NW7, Unter den Linden 38 (nicht an die Reichsdruckerei) zurückzusenden.

in Wirklichkeit zutrifft. In der Tat kann der
Ionengehalt der Röhre durch Strömungen ~~innerhalb derselben~~ innerhalb derselben
~~Anfang~~ nicht geändert werden, ~~als bis Teile bis Teile~~
~~eines Elektrolyts der beiden Elektrolyten an das~~
~~entgegengesetzte Ende der Röhre gelangt~~. Sobald aber die Diffusion nach (3) und (4)
~~die Diffusionsgleichungen (3)~~ wirksam ~~wurde~~ wird,
muß sich die Röhre, bei konstant bleibendem Cl'-Gehalt, an K'-Ionen anreichern,
während der Gehalt an H'-Ionen ~~zur~~ entsprechend
zurückgeht. Parallel damit ~~geht~~ sinkt die
ursprüngliche Potentialdifferenz $\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1 = 97{,}7$ ~~mV~~ Millivolt
~~auf den den~~ gegen den „stationären" Wert 87,7 Millivolt hin
herab.

§ 5. Die hauptsächlichste Fehlerquelle bei einem
derartigen Versuch dürfte ~~darin~~ in der Schwierigkeit liegen, ~~daß~~
die Flüssigkeit in der Röhre in Ruhe zu
halten, da die kleinste Druck~~differenz~~schwankung an deren
beiden Enden eine Verschiebung der ganzen
Flüssigkeitssäule bewirkt, wodurch dann der
Ionengehalt ~~der~~ der Röhre beträchtlich geändert
wird. Indessen ~~läßt~~ wird sich der ~~Leitung eines Teiles~~ hierdurch
~~falsch~~ bedingte Fehler verhältnismäßig leicht eliminieren lassen.
Denn jede Verschiebung der ganzen Flüssigkeit in der Röhre
bewirkt, ~~eine nach~~ da die beiden Elektrolyte sehr
verschieden verdünnt sind, eine starke Veränderung
des Gehaltes der Röhre an Cl'-Ionen, und man
kann daher umgekehrt aus der ~~Ab~~ bei einem Versuch
eingetretenen Änderung des Chlorgehaltes die Größe der

V

OSI

Gruppe XI.

Elemente: 0, 1.

Für $\supset$, $\wedge$ und $\vee$ die normalen Tabellen. $\neg 0 = \neg 1 = 1$.

4. 11 gilt nicht, denn $1 \supset 1 \cdot \wedge \cdot 1 \supset \neg 1 \cdot \supset \neg 1 = 0 \wedge 0 \supset 1 = 0 \supset 1 = 1$.

Gruppe XII.

Elemente: 0, 1, 2.

$\supset$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	1
2	2	0	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\neg$	0	1	2
	1	0	1

Hier gelten alle Axiome; der Satz $\neg\neg a \supset a$ nicht, denn $\neg\neg 2 \supset 2 = \neg 1 \supset 2 = 0 \supset 2 = 2$.

Nach 4. 45 erhalten wir den *Satz*: Die Formel, welche den Satz vom ausgeschlossenen Dritten darstellt, kann aus den Axiomen nicht abgeleitet werden.

Gruppe XII kann wie folgt interpretiert werden: 0 bedeute einen beliebigen richtigen Satz, 1 einen beliebigen falschen Satz, 2 einen Satz, der nicht falsch sein kann, dessen Richtigkeit aber nicht bewiesen ist. Man erhält dann eben die obigen Tabellen.

Verschiebung bewegen, und darum auch, weil
die Konzentrationen der Elektrolyte an den ~~[illegible]~~ beiden
Enden der Röhre bekannt sind, diejenige Änderung
des Gehaltes an H'-Ionen und an K'-Ionen,
welche durch die Bewegung der ganzen Flüssigkeit
bedingt ist. Berücksichtigt man diese an der ~~beiden~~
gemessenen Änderung, so bleiben diejenigen Größen
$\bar{c}'$ und $\bar{c}''$ übrig, auf welche sich die ~~[illegible]~~ Werte
~~(18), (20)~~ (19) und (22) beziehen.

§ 5. Um durch eine einfache Rechnung ein Urteil
über die Größenordnung der Zeiten zu gewinnen,
in welchen ~~sich~~ durch Diffusion merkliche Veränderungen der
Ionengehalte bewirkt werden, kann man
folgendermaßen verfahren.

Wir denken uns zu Anfang die
Röhrenflüssigkeit im ~~Mischzustand~~ Mischungszustand, also die Ionenkonzentrationen
~~Konzentrationen~~ durch die Ausdrücke (7) und (8), die Ionengehalte durch die Ausdrücke (18)
gegeben, und fragen nach ~~die~~ der zeitlichen Änderung des anfänglichen
~~des~~ Verhältnisses $\frac{\bar{c}''}{\bar{c}'} = \frac{c_2}{c_1} =$ ~~0,003~~ 0,01.

Hierfür sind maßgebend die Gleichungen (10)
für die zeitlichen Änderungen der Ionenkonzentrationen,
aus denen sich durch Integration ~~über~~ nach x von 0 bis δ
ohne weiteres die zeitlichen Änderungen der Ionengehalte (16) und (17)
berechnen lassen, ~~da ja die~~ mit Benutzung von (3),
(6) und (7). Dies ergibt:

Gruppe VI.

Elemente: 0, 1, 2, 3.

⊃	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
2	2	0	0	0
3	2	0	2	0

∧	0	1	2	3
0	0	1	2	2
1	1	1	1	1
2	2	1	2	2
3	2	1	2	2

∨	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	2
3	0	3	2	3

¬	0	1	2	3
	1	0	1	1

2.15 gilt nicht, denn $0 \wedge \cdot 0 \supset 3 \cdot \supset 3 = 0 \wedge 2 \supset 3 = 2 \supset 3 = 2$.

Gruppe VII.

Elemente: 0, 1.

⊃	0	1
0	0	0
1	1	0

∧	0	1
0	0	1
1	1	1

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

¬	0	1
	1	0

3.1 gilt nicht, denn $0 \supset 0 \vee 1 = 0 \supset 1 = 1$.

(Die Tabellen für ⊃ und ∧ sind diejenigen, welche man erhält, wenn 0 einen beliebigen richtigen und 1 einen beliebigen falschen Satz darstellt. Wir wollen solche Tabellen »normal« nennen.)

Gruppe VIII.

Elemente: 0, 1, 2.

⊃	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	0	0

∧	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

∨	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	0	2	2

¬	0	1	2
	1	0	0

3.11 gilt nicht, denn $0 \vee 2 \supset 2 \vee 0 = 0 \supset 2 = 2$[1].

Gruppe IX.

Elemente: 0, 1.

Für ⊃ und ∧ die normalen Tabellen. (S. Gruppe VII.)

$a \vee b = 0$ immer. $\neg 0 = 1$. $\neg 1 = 0$.

3.12 gilt nicht: $1 \supset 1 \cdot \wedge \cdot 1 \supset 1 \cdot \supset \cdot 1 \vee 1 \supset 1 = 0 \wedge 0 \supset \cdot 0 \supset 1 = 0 \supset 1 = 1$.

Gruppe X.

Elemente: 0, 1.

Für ⊃, ∧ und ∨ die normalen Tabellen. $\neg 0 = \neg 1 = 0$.

4.1 gilt nicht, denn $\neg 0 \supset \cdot 0 \supset 1 = 0 \supset 1 = 1$.

---

[1] Die Tabellen für ∨ und ¬ in Gruppe VIII sind identisch mit denen in Gruppe VI von Bernays; diejenigen für ⊃ und ∧ sind gebildet, wie in der vorigen Fußnote angegeben.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c''}{c'}\right) \quad \text{~~}\frac{2RT}{\delta^2 c_1}\left\{(u'-v)c_1-(u''-v)c_2\right\}\cdot\left\{\frac{u''}{u''+v}+\frac{c_2}{c_1}\frac{u'}{u'+v}\right\}\text{~~}$$

$$= \frac{2RT}{\delta^2}\left\{(u'-v)-\frac{c_2}{c_1}(u''-v)\right\}\cdot\left\{\frac{u''}{u''+v}+\frac{c_2}{c_1}\frac{u'}{u'+v}\right\}.$$

Die Änderungsgeschwindigkeit ist also umgekehrt proportional dem Quadrat der Länge der Röhre, wie leicht zu verstehen.

Für $\delta = 1$ cm und das oben behandelte spezielle Beispiel haben wir einzusetzen: $\frac{c_2}{c_1} = 0{,}01$, $R = 8{,}31 \cdot 10^7$, $T = 291$. ~~Für die~~ Als Beweglichkeitszahlen können in der zweiten Klammer die relativen Werte genommen werden, also: $u' = 294$ für H^{+}, $u'' = 60{,}7$ für K^{+}, $v = 55{,}8$ für Cl'. Dagegen müssen in der ersten Klammer die absoluten Beweglichkeiten eingesetzt werden, also $u' = 3{,}1 \cdot 10^{-15}$ als die Geschwindigkeit ~~(cm/sec)~~ in $\left[\frac{cm}{sec}\right]$, mit der sich 1 gr. Ion H^{+} unter der Einwirkung der Kraft 1 Dyn bewegt.

Dies ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c''}{c'}\right) = 6{,}3 \cdot 10^{-5}.$$

Bezieht man die Änderungsgeschwindigkeit statt auf 1 Sekunde auf 1 Tag, so hat man diesen Ausdruck mit 60·60·24 zu multiplizieren und erhält die Zahl ~~0,22~~ 5,4. Mithin ist in einem Tage ein merklicher Effekt zu erwarten.

54

Gruppe II.

Elemente: Alle positiven ganzen Zahlen und 0.

$a \supset b = 1$, wenn $a = 0$ und $b \neq 0$; $a \supset b = 0$ sonst.

$a \wedge 2 = 0$; $a \wedge b = a + b$, wenn $b \neq 2$.

$a \vee b = 0$, wenn $a = 0$ oder $b = 0$; $a \vee b = 1$ sonst.

$\neg 0 = 1$; $\neg a = 0$, wenn $a \neq 0$.

2.11 gilt nicht, denn $3 \wedge 2 \supset 2 \wedge 3 = 0 \supset 5 = 1$.

Gruppe III.

Elemente: Alle positiven und negativen ganzen Zahlen und 0.

$a \supset b = 1$, wenn $a = 0$ und $b \neq 0$; $a \supset b = 0$ sonst.

$a \wedge b = a + b$.

$a \vee b = 0$, wenn $a = 0$ oder $b = 0$; $a \vee b = 1$ sonst.

$\neg 0 = 1$; $\neg a = 0$, wenn $a \neq 0$.

2.12 gilt nicht, denn $1 \supset 2 \cdot \supset \cdot 1 \wedge -1 \supset 2 \wedge -1 = 0 \supset \cdot 0 \supset 1 = 0 \supset 1 = 1$.

(Man beachte den Unterschied zwischen -1 und $\neg 1$!)

Gruppe IV.

Elemente: Alle positiven ganzen Zahlen, 0 und die Kardinalzahl α der abzählbar unendlichen Spezies.

$a \supset b = b - a$, wenn $b > 2a$; $a \supset b = 0$ sonst.

$a \wedge b = a + b$.

$a \vee b = 2a$, wenn $a \leqq b$; $a \vee b = 2b$ sonst.

$\neg \alpha = 0$; $\neg a = \alpha$, wenn a endlich ist.

2.13 gilt nicht, denn $1 \supset 2 \cdot \wedge \cdot 2 \supset 4 \cdot \supset \cdot 1 \supset 4 = 0 \wedge 0 \supset 3 = 0 \supset 3 = 3$.

Gruppe V[1].

Elemente: $0, 1, 2$.

$\supset$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	1
2	1	0	1

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	1	1
2	0	1	0

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	0

$\neg$	0	1	2
	1	0	1

2.14 gilt nicht, denn $2 \supset \cdot 0 \supset 2 = 2 \supset 1 = 1$.

[1] Die Tabellen für $\supset$ und $\wedge$ dieser Gruppe sind aus denen für $\vee$ und $\neg$ in Gruppe V bei Bernays gebildet durch Anwendung der Formeln

$$a \supset b = \neg a \vee b; \quad a \wedge b = \neg(\neg a \vee \neg b).$$

AUTOGRAPHE

de

Planck

Max Karl Ernst Ludwig

OBSERVATIONS

1./ Cp.a.s. Berlin-Grunewald, 28.7.29, an Prof. Felix Ehrenhaft, Wien, dankt für einen Brief und sagt zu, später seine Reisepläne für den Sommer anzugeben.

2) L.a.s. 1 1/2 p.8° Berlin-Grunewald 5.5.1929 mit eigenhändigem Briefumschlag an Dr. Weiner, wegen des Manuskriptes seines Werkes ,,Wärme'' für die ,,Einführung in die theoretische Physik''.

3) L.a.s. 1 p. 8° Berlin-Grunewald 15.5.1929 mit eigenhändigem Briefumschlag an Dr. Weiner, mit Sendung eines handschriftlichen Entwurfes zu einem Vortrag.

4) P.a. 2 p.4° mit Aufschrift ,,Vortrag Akademie 22.7.20'' Handschriftlicher Entwurf zu dem Vortrage mit dem Titel ,, Gesetz der Energiestreuung im Normalspektrum'' mit zahlreichen mathem. Ableitungen und Korrekturen im Text /Geschenk Prof. Planck/.

5) L.a.s. 1 1/2 p.8°, Berlin, 3.6.30, mit Briefumschlag u.eigh. Adresse an Dr.Armin Weiner, teilt mit, dass er das zugesagte Manuskript ,, Wärmelehre'' bereits vernichtet habe und stellt das Manuskript seines am 26.VI. zu haltenden Vortrages in der Akademie der Wissenschaften in Aussicht.

Geb. 23.4.1858 Kiel, stud. 1874–77 München, dann bis 1878 Berlin, Dr. phil. 1879 München, 1880 Privatdoz. München, 1885 Prof. extr. Univ. Kiel, 1889 Prof. extr. 1892 Prof. ord. Univ. Berlin u. Mitgl. d. Ak. d. W. Dr. phil. nat. Frankfurt, Dr. techn. München, Dr. med. Rostock.

Einer der hervorragendsten theor. Physiker der Gegenwart, arbeitete insb. auf dem Gebiete der Thermodynamik u. ist der Begründer der Quanten-Theorie.

6.) Cp.a.s. Berlin 9.7.(19)30 an Dr. Weiner, teilt mit, dass er mit gleicher Post das Manuskript seines letzten Vortrages in der Berliner Ak. d. W. sendet.

7) M.a.s. 11 p. 4° Manuskript eines am 26. VI. 1930 in der Berliner Ak. d. W. gehaltenen Vortrages mit dem Titel: „Ueber die Leitfähigkeit verdünnter Elektrolyte" von Max Planck. Mit eigenhändigem Briefumschlag an Dr. Weiner.

8.) M.a.s. 2 1/2 p.4°, o.O., 5.11.1915; handschriftliche Notizen, Formeln und Zeichnungen als Behelfe für einen am 5.XI.1915 in der Physikalischen Gesellschaft gehaltenen Vortrag.

AUTOGRAPHE

de

Planck

Max Karl Ernst Ludwig

OBSERVATIONS

9. L.a.s. 2 1/2 p.8o, Berlin-Grunewald, 22.6.1920, an Frl. Rabel, Kann leide nicht so ausführlich, als er wünsch. würde, auf die aufgeworfene Frage eingehen, da er ungeheuer überlast. ist. Hält den II. Hauptsatz der Thermodynamik für ganz ungeeignet, um als Grundlage oder auch nur als Beitrag für eine Untersuchung über d. Dasein Gottes oder über die Endlichkeit der Welt zu dienen, weil er ein Wahrscheinlichkeitssatz ist. Bedauert, Frl. Rabel gelegentlich der Bohr-Sitzung nicht haben ausführlich sprechen zu können.

Geb. 23.4.1858 in Kiel; studierte in München und Berlin, wurde folgeweise Dr. phil. u. Privatdozent in München, Prof. extr. a. d. Univ. Kiel, dann Prof. ext. und ord. in Berlin, Mitgl. d. Ak. d. W., Dr. phil. nat. Frankfurt, Dr. techn. München, Dr. Med. in Rostock.

Einer der hervorragendsten theoretischen Physiker der Gegenwart, arbeitete viel auf dem Gebiete der Thermodynamik, Begründer der Quantentheorie und Nobelpreisträger.